Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 3 im Wintersementer 2020/21 (am 13.11.20)

4. Die Beschreibung einer linearen algebraischen Gruppe in der Sprache der Koordinatenringe

Wir haben bisher den Zusammenhang zwischen den Lösungsmengen polynomialer Gleichungssysteme (den affinen Varietäten) und den Mengen maximaler Ideale von deren Koordintenringen beschrieben.

Dieser weist darauf hin, daß sich die Eigenschaften affiner Varietäten durch Eigenschaften von deren Koodinatenringen ausdrücken lassen sollten. Unser nächstes Ziel besteht darin, genau dies für die Gruppenstruktur einer linearen algebraischen Gruppe

$$G$$

zu tun. Dazu übersetzen wir die Gruppen-Axiome zunächst in die Sprache der kommutativen Diagramme und gehen dann zu den Diagrammen der Koordinatenringe über.

4.1 Die Gruppen-Axiome und kommutative Diagramme

Die Gruppenstruktur einer algebraischen Gruppe läßt sich durch zwei Abbildungen beschreiben, der Gruppen-Multiplikation

$$\mu: G \times G \longrightarrow G, (x,y) \mapsto x\bullet y,$$

und dem Übergang zum Inversen,

$$i: G \longrightarrow G, x \mapsto x^{-1}.$$

Dies Abbildungen haben Koordinatenfunktionen, welche Elemente von Koordinatenringen sind. Solche Abbildungen nennen wir im folgenden <u>reguläre Abbidlungen</u>. Die Koordinatenfunktionen der regulären Abbildungen wollen wir auch <u>reguläre Funktionen</u> nennen.

Weiter erweist sich die konstante Abbildung

$$e: G \longrightarrow G, x \mapsto e,$$

als nützlich, welche jedes Gruppen-Element auf das neutrale Element der Gruppe abbildet (und welches wir ebenfalls mit e bezeichnen).

Die Gruppen-Axiome lassen sich in die Forderung übersetzen, daß die folgenden Diagramme kommutativ sind.

<u>Das Assoziativgesetzt</u>.

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "\mu\times id"] \arrow[d, "id\times\mu"'] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x,y,z) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x\bullet y,z) \arrow[d, mapsto] \\ (x,y\bullet z) \arrow[r, mapsto] & x\bullet(y\bullet z)=(x\bullet y)\bullet z \end{tikzcd}$$

<u>Existenz des neutralen Elements</u>. Es gibt eine konstante (und damit reguläre) Abbildung $e:G\longrightarrow G$ - deren einzigen Wert wir ebenfalls mit e bezeichnen -, für welche das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(id{,}e)"] \arrow[d, "(e{,}id)"'] \arrow[dr, "id"] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & (x,e) \arrow[d, mapsto] \\ (e,x) \arrow[r, mapsto] & e\bullet x = x = x\bullet e \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichne (f,g) die Abbildung $G \longrightarrow G\times G$ mit den Koordinatenfunktionen f und g.

<u>Existenz des inversen Elements</u>.

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[d, "\mu"'] & G\times G \arrow[l, "i\times id"'] \\ G & G \arrow[l, "e"'] \arrow[u, "D"'] \arrow[d, "D"] \\ G\times G \arrow[u, "\mu"] & G\times G \arrow[l, "id\times i"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x^{-1},x) \arrow[d, mapsto] & (x,x) \arrow[l, mapsto] \\ x^{-1}\bullet x=e & x \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto] \\ x\bullet x^{-1}=e & x \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\ (x,x^{-1}) \arrow[u, mapsto] & (x,x) \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

Dabei sei $D: G\longrightarrow G\times G$ der <u>Diagonal-Morphismus</u> $x \mapsto (x,x)$.

Wir wollen von diesen Diagrammen nun zu Diagrammen übergehen, in denen anstelle von G der Koordiantenring k[G] steht. Dazu brauchen wir vorher aber noch eine Beschreibung der Koordintenringe von G×G und G×G×G. Die einfachste Möglichkeit zur Bestimmung des Koordinatenrings eines Produkts führt über die Charakterisieurng dieses Produkts durch eine Universatitätseigenschaft.

4.2. Die Universalitätseigenschaft eines Produkts von affinen Varietäten

Seien zwei affine Varietäten über k gegeben, sagen wir

$$X = V(f_1,\dots, f_m) \subseteq k^r \text{ und } Y = V(g_1,\dots,g_n) \subseteq k^s$$

mit Polynomen

$$f_i \in k[S_1,\dots,S_r] =: k[S] \text{ für } i = 1,\dots, m,$$

wobei die S_i Unbestimmte sein sollen, und

$$g_j \in k[T_1,\dots,T_s] =: k[T] \text{ für } j = 1,\dots,n.$$

Dann ist die Produktmenge X×Y wieder eine affine Varietät:

$$\begin{aligned} X\times Y &= \{(x,y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\} \\ &= \{(x,y)\in k^r\times k^s \mid f_i(x) = 0 \text{ und } g_j(y) = 0 \text{ für } i=1,\dots,r \text{ und } j = 1,\dots,s\} \\ &= V(f_1,\dots, f_m, g_1,\dots,g_n) \subseteq k^{r+s} \end{aligned}$$

Die natürlichen Projektionen

$$p_X: X\times Y \longrightarrow X,\ (x,y) \mapsto x, \text{ und } p_Y: X\times Y \longrightarrow Y,\ (x,y) \mapsto y,$$

auf die beiden Faktoren haben als Koordinatenfunktionen gerade die Einschränkungen der Koordinatenfunktionen S_i: $k^{r+s} \longrightarrow k$ und T_j:$k^{r+s} \longrightarrow k$ auf $X\times Y$. Diese liegen im Koordinatenring $k[X\times Y]$. Deshalb sind p_X und p_Y reguläre Abbildungen.

Eine Abbildung einer affinen Varietät Z mit Werten in $X\times Y$, sagen wir

$$f: Z \longrightarrow X\times Y,$$

ist genau dann regulär, wenn die Koordinatenfunktionen von f regulär sind. Das ist genau dann der Fall, wenn die Zusammensetzungen $p_X\circ f$ und $p_Y\circ f$ regulär sind (denn die Koordinatenfunktionen dieser beiden Zusammensetzungen sind zusammen gerade die Koordinatenfunktionen von f),

$$f \text{ regulär} \Leftrightarrow p_X\circ f \text{ regulär und } p_Y\circ f \text{ regulär.}$$

Das bedeutet aber:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für je zwei reguläre Abbildungen } u: Z \longrightarrow X \text{ und } v\ Z \longrightarrow Y \text{ gibt es}\\ \text{genau eine reguläre Abbildung } f:.Z \longrightarrow X\times Y \text{ mit}\\ \qquad\qquad p_X\circ f = u \text{ und } p_Y\circ f = v\end{array}\right\}$$

Mit anderen Worten, das Produkt zweier affiner Varietäten X und Y ist eine affine Varietät Π zusammen mit zwei regulären Abbildungen p_X:$\Pi \longrightarrow X$ und p_Y:$\Pi \longrightarrow Y$ mit der folgenden Eigenschaft.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für je zwei reguläre Abbildungen } u: Z \longrightarrow X \text{ und } v\ Z \longrightarrow Y \text{ gibt es}\\ \text{genau eine reguläre Abbildung } f:.Z \longrightarrow \Pi \text{ mit}\\ \qquad\qquad p_X\circ f = u \text{ und } p_Y\circ f = v\end{array}\right\} \quad (1)$$

Mit anderen Worten, es gibt genau eine reguläre Abbildung f, für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \\ Z \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "v"'] & \Pi \arrow[u, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutativ wird.

Durch diese Eigenschaft ist Π bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert: ist nämlich Σ zusammen zwei regulären Abbildungen q_X:$\Sigma \longrightarrow X$ und q_Y:$\Sigma \longrightarrow Y$ eine weitere affine Varietät mit dieser Eigenschaft, so gibt es wegen der Eigenschaft (1) von Π genau eine reguläre Abbildung f: $\Sigma \longrightarrow \Pi$ mit

$$p_X\circ f = q_X \text{ und } p_Y\circ f = q_Y$$

und wegen der analogen Eigenschaft von Σ genau eine reguläre Abbildung g: $\Pi \longrightarrow \Sigma$ mit

$$q_X \circ g = p_X \text{ und } q_Y \circ g = p_Y.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$q_X \circ g \circ f = q_X \text{ und } q_Y \circ g \circ f = q_Y$$

und

$$p_X \circ f \circ g = p_X \text{ und } p_Y \circ f \circ g = p_Y.$$

Diese vier Identitäten bleiben trivialerweise erhalten, wenn man für $g \circ f$ bzw. $f \circ g$ jeweils die identische Abbildung einsetzt. Wegen der Eindeudigkeitsaussage von (1) und der analogen Eindeutigkeitsaussage für Σ anstelle von Π muß dann aber gelten

$$f \circ g = \mathrm{Id} \text{ und } g \circ f = \mathrm{Id},$$

d.h. f und g sind zueinander inverse Isomorphismen.
Mit anderen Worten f und g sind die eindeutigbestimmen (und zueinander inversen) Isomorphismen, für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
\Sigma \arrow[ur, "q_X"] \arrow[dr, "q_Y"'] \arrow[r, shift left, "f"] & \Pi \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[u, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

kommutativ wird.
Wir haben gezeigt, das Produkt zweier affiner Varietäten wird durch die Universalitäteigenschaft (1) bis auf Isomorphie festgelegt.
Für die zugehörigen Koordinatenringe und k-Algebra-Homomorphismen bedeutet dies,

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Für je zwei k-Algebra-Homomorphismen } u^*: k[X] \longrightarrow k[Z] \text{ und} \\
v^*: k[Y] \longrightarrow k[Z] \text{ gibt es genau einen k-Algebra-Homomorphismus} \\
f^*: k[\Pi] \longrightarrow k[Z] \text{ mit} \\
\qquad\qquad f^* \circ p_X^* = u^* \text{ und } f^* \circ p_Y^* = v^*
\end{array}\right\}$$

Mit anderen Worten, der Koordinatenring des Produkts $\prod$ von X und Y ist eine k-Algebra T zusammen mit zwei k-Algebra-Homomorphismen

$$a\ (=p_X^*): k[X] \longrightarrow C \text{ und } b\ (=p_Y^*): k[Y] \longrightarrow C$$

mit der folgenden Eigenschaft

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Für je zwei k-Algebra-Homomorphismen } u^*: k[X] \longrightarrow k[Z] \text{ und} \\
v^*: k[Y] \longrightarrow k[Z] \text{ gibt es genau einen k-Algebra-Homomorphismus} \\
\tilde{\psi}: T \longrightarrow k[Z] \text{ mit} \\
\qquad\qquad \tilde{\psi} \circ b = u^* \text{ und } \tilde{\psi} \circ b = v^*
\end{array}\right\} (2)$$

Durch diese Bedingung ist die k-Algebra T bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

4.3 Vergleich mit der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts der Koordinatenringe

Seien weiterhin $X \subseteq k^r$ und $Y \subseteq k^s$ zwei affine Varietäten. Wir setzen

$$A := k[X] \text{ und } B := k[Y]$$
die Koordinatenringe von X bzw. Y. Wir betrachten das Tensorprodukt dieser k-Algebren über k,
$$T := A\otimes_k B.$$
Nach Definition ist die natürliche Abbildung
$$\varphi : A\times B \longrightarrow A\otimes B,\ (x,y) \mapsto x\otimes y,$$
bilinear über k und jede über k bilineare Abbildung
$$A\times B \longrightarrow C$$
von k-Algebren faktorisiert sich eindeutig über φ.

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A\otimes B \arrow[dl] \\ C & \end{tikzcd}$$

Sind $u: Z \longrightarrow X$ und $v: Z \longrightarrow Y$ reguläre Abbildungen affiner Varietäten und
$$u^*: A \longrightarrow k[Z] \text{ und } v^*: B \longrightarrow k[Z]$$
die zugehörigen k-Algebra-Homomorphismen der Koordinatenringe, so ist die Abbildung
$$\psi : A\times B \longrightarrow k[Z],\ (x,y) \mapsto u^*(x)\bullet v^*(y),$$
bilinear über k, faktorisiert sich also eindeutig über φ. Es gibt also genau einen k-Algebra-Homomorphismus
$$\widetilde{\psi}: T = A\otimes B \longrightarrow k[Z] \text{ mit } \psi = \widetilde{\psi}\circ\varphi.$$

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A\otimes B \arrow[dl, "\widetilde{\psi}"] \\ k[Z] & \end{tikzcd}$$

Die Zusammensetzung mit den beiden k-Algebra-Homomophismen
$$a: A \longrightarrow A\otimes B,\ x \mapsto x\otimes 1, \text{ und } b: B \longrightarrow A\otimes B,\ y \mapsto 1\otimes y.$$
liefert k-Algebra-Homomorphismen
$$\widetilde{\psi}\circ a: A \longrightarrow k[Z] \text{ und } \widetilde{\psi}\circ b: B \longrightarrow k[Z]$$
mit
$$\begin{aligned}
(\widetilde{\psi}\circ a)(x) &= \widetilde{\psi}(x\otimes 1) && \text{(Definiton von a)}\\
&= \widetilde{\psi}(\varphi(x,1)) && \text{(Definition von } \varphi)\\
&= \psi(x,1) && \text{(Definition von } \widetilde{\psi})\\
&= u^*(x)\bullet v^*(1) && \text{(Definition von } \psi)\\
&= u^*(x)\bullet 1 && \text{(v* ist k-Algebra-Homomorphismus)}\\
&= u^*(x)
\end{aligned}$$
für jedes $x \in A$. Damit gilt
$$\widetilde{\psi}\circ a = u^*.$$
Eine analoge Rechnung zeigt,
$$\widetilde{\psi}\circ b = v^*.$$

Wir haben gezeigt, daß Aussage (2) gilt mit

$$T := A\otimes B$$

und den beiden k-Algebra-Homomorphismen

$$a: A \longrightarrow A\otimes B,\ x \mapsto x\otimes 1,$$

$$b: B \longrightarrow A\otimes B,\ y \mapsto 1\otimes b.$$

Das bedeutet,

$k[X]\otimes k[X] = A\otimes B$ ist kanonisch isomorph zu $k[X\times Y]$

wobei a und b gerade die k-Algebra-Homomorphismen sind, welche durch die natürlichen Projektionen auf die Faktoren induziert werden.
Wir werden im folgenden $k[X\times Y]$ mit $k[X]\otimes k[X]$ identifizieren. Dann hat der k-Algebra-Homomorphismus

$$\widetilde{\psi}: A\otimes B \longrightarrow k[Z]$$

die Gestalt $\widetilde{\psi} = f^*$ mit einer regulären Abbildung $f: Z \longrightarrow X\times Y$. Durch Übergang zu den auf den maximalen Spektren induzierten Abbildungen erhält man aus (2) die ursprüngliche Charakterisierung (1) des Produkts von Varietäten.

4.4 Die Gruppen-Axiome in der Sprache der Koordinatenringe

Durch Übergang zu den Koordinatenringen und induzierten Homomorphismen von k-Algebren bekommen die Gruppen-Axiome von 4.1 die folgende Gestalt.

Eine lineare algebraische Gruppe ist eine affine algebraische Varietät G, deren Koordinatenring

$$A := k[G]$$

versehen ist mit den zwei k-Algebra-Homomorphismen

$$\Delta := \mu^*: A \longrightarrow A\otimes_k A$$

$$\iota := i^*: A \longrightarrow A$$

genannt <u>Komultiplikation</u> von G bzw. <u>Antipode</u> von G,wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind.
<u>Das Assoziativgesetz</u>. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A & A\otimes A \arrow[l, "\Delta\otimes id"'] \\
A\otimes A \arrow[u, "id\otimes\Delta"] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

<u>Existenz des neutralen Elements</u> gibt einen k-Algebra-Homomorphismus $e: A \longrightarrow k$, genannt Auswertung im neutralen Element, für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
A & A\otimes A \arrow[l, "id\otimes e"'] \\
A\otimes A \arrow[u, "e\otimes id"] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "id"']
\end{tikzcd}$$

<u>Existenz des inversen Elements</u>. Das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$
\begin{array}{ccc}
A\otimes A & \xrightarrow{\iota\otimes id} & A\otimes A \\
\Delta\uparrow & & \downarrow m \\
A & \xrightarrow{\varepsilon} & A \\
\Delta\downarrow & & \uparrow m \\
A\otimes A & \xrightarrow{id\otimes\iota} & A\otimes A
\end{array}
$$

Dabei bezeichne

$$m: A\otimes A \longrightarrow A,\ x\otimes y \mapsto xy,$$

den k-Algebra-Homomorphismus, welcher durch die Algebra-Multiplikation

$$A\times A \longrightarrow A,\ (x,y) \mapsto xy,$$

induziert wird. Weiter sei

$$\varepsilon: A \xrightarrow{e} k \hookrightarrow A$$

die Zusammensetzung der Auswertung im neutralen Element mit der natürlichen Einbettung von k in die k-Algebra A.